$$\Rightarrow = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i-\mu)^2 - nE(\bar{x}-\mu)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \cancel{n}\frac{\sigma^2}{\cancel{n}}\right] = \sigma^2$$

02-03-16

Previously on Loukas

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 *$$

$$* = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right)$$

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i)$, $Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(x_i)$, x_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

$m_X(t) = E(e^{tx})$, $m_{aX+b}(t) = e^{bt} m_X(at)$,

$m_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = m_{x_1}(t) \cdots m_{x_n}(t)$, $x_1, \dots, x_n$: ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

• Γάμμα: $G(a,\beta) = f_X(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\beta}$

$m_G(t) = (1-\beta t)^{-a}$, $E(X) = a\beta$, $Var(X) = a\beta^2$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightsquigarrow m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ ■

• Θεώρημα: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό X με $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Τότε:

i) $E(\bar{x}) = \mu$

ii) $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

iii) $E(S^2) = \sigma^2$

• **Πόρισμα**: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό (μ_1, σ_1^2) και $x_2, \dots, x_{2n}$ τυχαίο δείγμα από ανεξάρτητο πληθυσμό (μ_2, σ_2^2)

Τότε: $E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$ και $Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

όταν $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$

Παράδειγμα: Πληθυσμός $X: 3,4,5$, δηλαδή: $P(x=X) = \frac{1}{3}$, $x = 3,4,5$
Πιθανότητα $P_x: \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

Δειγματοληψία: $n=2$ (με επανάθεση)

• $E(x) = \mu = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 = 4$

• $E(x^2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{3} \cdot 4^2 + \frac{1}{3} 5^2 = \frac{50}{3}$

• $\sigma^2 = \frac{50}{3} - 4^2 = \frac{2}{3}$

• Δυνατά δείγματα: (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)

$\bar{x} = 3, 3.5, 4, 3.5, 4, 4.5, 4, 4.5, 5$

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$S^2 = 0, 0.5, 2, 0.5, 0, 0.5, 2, 0.5, 0$

Άρα, $\bar{X} = \bar{x}$: 3 3.5 4 4.5 5

$P_{\bar{x}}$:	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9
$S^2 = s^2$:	0	0.5	2		
P_{s^2} :	3/9	4/9	2/9		

$E(\bar{x}) = \frac{1}{9}\cdot 3 + \dots + \frac{1}{9}5 = 4 \ (=\mu)$

$Var(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - \mu^2 = \frac{147}{9} - \frac{144}{9} = \frac{1}{3} \left(= \frac{2/3}{2} = \frac{\sigma^2}{9} \right)$

$E(S^2) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 0.5 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3} = \sigma^2$

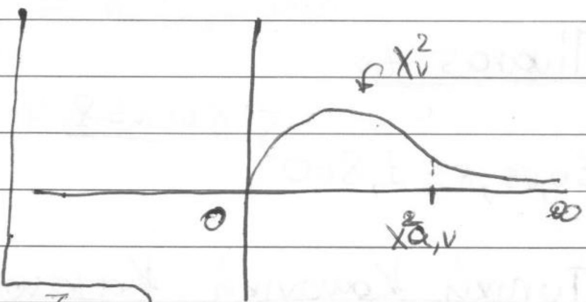
{Tip: Δεν ενδιαφέρει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας}

- χ^2_v — Χι τετράγωνο, με ν βαθμούς ελευθερίας
  (Chi squared distribution with n degrees of freedom)

$\chi^2_v \equiv G(\alpha = \frac{v}{2}, \beta = 2)$, $E(\chi_v^2 = v)$, $Var(\chi_v^2) = 2v$

Αν έχουμε $x_1, \dots, x_v$ ανεξάρτητες μεταβλητές,

* $N(0,1)$ και $X = \sum_{i=1}^{v} x_i^2 \sim \chi^2_v$



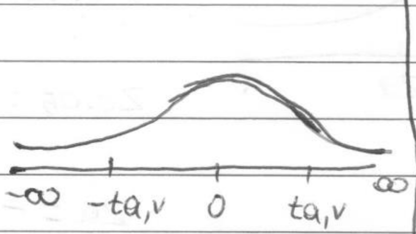
- t_v — Τι με ν βαθμούς ελευθερίας
  (Student t_v)

Αν τυχαία μεταβλητή x, με $X \sim N(0,1)$ και ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή $Y \sim \chi^2_v$ =>

Θα μας ενδιαφέρει $P(\chi^2_v \geq \chi^2_{a,v}) = 0$

εκατοστιαίο σημείο

Η t_v είναι συμμετρική και μοιάζει με την τυπική κανονική κατανομή.



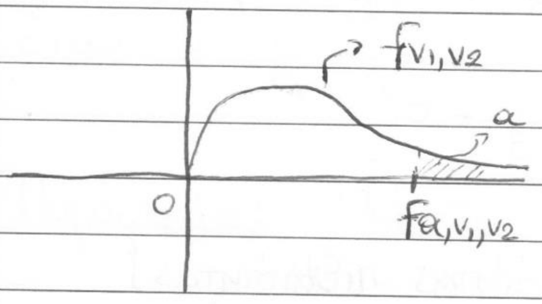
$P(t_v \geq t_{a,v}) = a$

$\left.\begin{matrix} x_1 \sim \chi^2_{v_1} \\ x_2 \sim \chi^2_{v_2} \end{matrix}\right\} \oplus \ x_1 + x_2 = \chi^2_{v_1+v_2}$

* Τυπική κανονική κατανομή

• f_{v_1,v_2} – Εφ με v_1 και v_2 βαθμοί ελευθερίας

Αν $\begin{cases} X_1 \sim \chi^2_{v_1} \\ X_2 \sim \chi^2_{v_2} \end{cases} \Rightarrow F = \dfrac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \sim f_{v_1,v_2}$, X_1, X_2: ανεξάρτητες



• Άσκηση: $F_{\alpha,v_1,v_2} = \dfrac{1}{F_{1-\alpha,v_2,v_1}}$ και

$t_v^2 = F_{1,v}$

Παρατήρηση: $\chi^2_v = \sum_{i=1}^{v} N^2(0,1)$, $t_v = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_v^2/v}}$, $f_{v_1,v_2} = \dfrac{\chi^2_{v_1}/v_1}{\chi^2_{v_2}/v_2}$

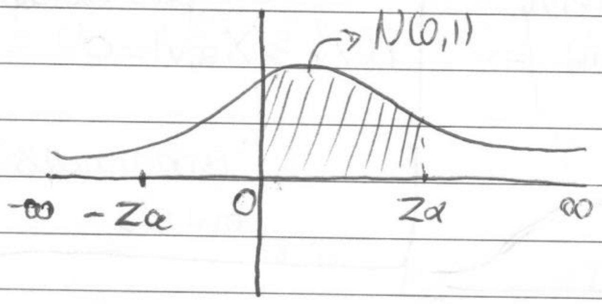
• Πίνακας χ_v^2 : $v = 11$

$\chi^2_{0.01,11} = 24{,}725$

• Πίνακας t_v

$t_{0,05,8} = 1{,}860$ για $v=8$

• Τυπική Κανονική Κατανομή



$P(0 < Z \leq z)$

$z_{0.05}: P(Z \geq z_{0.05}) = 0.05$

$z_\alpha = -z_\alpha = z_{1-\alpha}$

• Δειγματοληψία από κανονικούς πληθυσμούς

Θεώρημα 4.1: Έστω $x_1, ..., x_n$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό.

$N(\mu, \sigma^2)$. Τότε:

i) $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

ii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$

iii) $\bar{x}, s^2$: ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Απόδειξη: i) $m_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \rightsquigarrow M_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x}(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}\left(\frac{t}{n}\right) =$

$= m_{x_1}\left(\frac{t}{n}\right) ... m_{x_n}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2} ... e^{\mu\frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t^2}{n^2}\right)}$

$= e^{\cancel{n}\mu\frac{t}{\cancel{n}} + \cancel{n}\frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n^{\cancel{2}}}} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2/n\, t^2} \equiv N(\mu, \sigma^2/n)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right]$

$\rightsquigarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$

$X = \quad Y \quad - \quad Z \rightsquigarrow Y = X + Z$ Άθροισμα Ανεξάρτητων Μεταβλητών

(*) Άσκηση 2.3, (ii), (iv)} → Βιβλίο {Εισαγωγή στη Στατιστική Σ. Λουκάς}

$\cdot\ Y \sim ?$
$Z \sim ?$ || $\cdot\ X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \rightsquigarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \sim \chi^2_n$ } Για το Υ

$\cdot\ \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightsquigarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \rightsquigarrow \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n} \sim \chi^2_1$

$\cdot\ M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$\cdot\ M_Z(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

$\rightsquigarrow M_Y(t) = M_X(t) \cdot M_Z(t) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow M_X(t) = \frac{M_Y(t)}{M_Z(t)} = \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}} =$

$= (1-2t)^{-\frac{(n-1)}{2}} \equiv \chi^2_{n-1}$